Klausur zur MATHEMATIK 1 für Studierende der Wirtschaftswissenschaften
am Mittwoch, den 04. Februar 2015, 11:00–13:00 Uhr

Aufgabe 1 (1 + 3 + 11 + 6 + 4 = 25 Punkte) Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ r \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

(a) Für welche(s) $r \in \mathbb{R}$ stehen $\vec{a}$ und $\vec{c}$ senkrecht aufeinander?

(b) Sei $r = -4$. Geben Sie eine Gleichung der Ebene an, die durch $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ beschrieben wird (in Parameterform!).

(c) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diejenige Matrix, die aus den Spaltenvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gebildet wird.

  (i) Für welche(s) $r \in \mathbb{R}$ ist A invertierbar?

  (ii) Sei $r = -4$. Lösen Sie unter Angabe aller Rechenschritte das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{d}$.

  (iii) Geben Sie fr das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{c}$ mit beliebigem $r \in \mathbb{R}$ eine Lösung an (ohne Verwendung des Gauß-Algorithmus, mit Begründung)?

(d) Für eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ gelte rang $C = 3$. Geben Sie drei verschiedene Folgerungen an.

(e) Seien F, G, $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbare Matrizen. Lösen Sie folgende Gleichung allgemein nach der Matrix $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ auf und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

$$FXG + GF = H.$$

Aufgabe 2 (11 + 14 = 25 Punkte) Gegeben sei das Lineare Optimierungsproblem (LOP) mit $x_i \geq 0\,(i = 1, \ldots, 4)$

$$\begin{aligned} \pi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 9x_4 &\to \max! \\ +x_2 \quad -x_3 \quad +2x_4 &\leq 1, \\ x_1 \quad -x_2 \quad +x_3 \quad +x_4 &\leq 2. \end{aligned}$$

(a) Lösen Sie das LOP mit dem Simplex-Algorithmus unter Angabe aller Rechenschritte. Geben Sie in jedem Schritt die Basisvariablen (in der ersten Spalte) und die zugehörige Basislösung an.

(b) Wie lautet das zugehörige duale LOP? Lösen Sie dieses graphisch. Markieren Sie auch den zulässigen Bereich und bestimmen Sie den Schnittpunkt der zum Optimalpunkt gehörenden Geraden rechnerisch.

Bitte beachten Sie die zweite Seite!

Aufgabe 3 (6 + 8 + 5 + 6 = 25 Punkte)

(a) Berechnen Sie ausführlich

$$\sum_{k=3}^{\infty} 8 \cdot \frac{2^{k-4}}{3^{k-2}} .$$

(b) Eine rekursiv definierte Folge ist gegeben durch

$$a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{a_0}{4}, \; a_0 \in \mathbb{R}, n \geq 0.$$

Geben Sie alle Folgenglieder bis a_3 in Abhängigkeit von a_0 an (Hinweis: Sie brauchen die Brüche nicht zusammenzufassen). Drücken Sie a_{n+1} mit Hilfe von a_0 aus und untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz. Geben Sie im Falle von Konvergenz den Grenzwert an (in Abhängigkeit von a_0).

(c) Gegeben sei die Folge

$$b_n = \left(1 - \frac{5}{r \cdot n}\right)^{3n}, \; n > 0.$$

mit einer reellen Zahl $r \geq 0$. Für welche(s) $r \in \mathbb{R}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -1$? (Mit Begründung!) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ für $r = 15$.

(d) Bestimmen Sie ausführlich zu der unten stehenden Folge den Grenzwert ($n \in \mathbb{N}$)

$$c_n = (n+1) - \sqrt{n^2+1}.$$

Aufgabe 4 (12 + 8 + 5 = 25 Punkte)

(a) Betrachten Sie die Funktion

$$g(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Geben Sie den zugehörigen Definitionsbereich an und untersuchen Sie $g(x)$ auf Nullstellen, Extremstellen (welche Art?), Monotonie sowie das Verhalten für $x \to \pm\infty$.
Hinweis: Sie dürfen - ohne sie selbst zu berechnen - die zweite Ableitung benutzen

$$g''(x) = 8\frac{x(x^2-9)}{(x^2+3)^3} .$$

(b) Gegeben sei die von zwei Parametern a, $b \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion

$$f_{a,b}(x) := \begin{cases} \sqrt{a - x^2}\,, & 0 \leq x < 1 \\ x \cdot e^{-x^2+1} + b\,, & x \geq 1 \end{cases} .$$

Bestimmen Sie a und b so, dass f an der Stelle 1 stetig und stetig differenzierbar ist.

(c) Sei $h(x) = (x^2 + 12)^2$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Elastizität $\varepsilon(h; x) = 1$? Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion elastisch bzw. unelastisch?
