Klausur zur MATHEMATIK 2 für Studierende der Wirtschaftswissenschaften
am Donnerstag, den 18. Juli 2013, 09:00–11:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 + 4 + 3 + 5 + 5 + 3 Punkte) Gegeben sei die Funktion dreier Veränderlicher

$$f(x,y,z) = 16(x-3)^2 + 9(y+2)^2 + ze^{x-y}.$$

(a) Skizzieren Sie die Niveaulinien zu $f(x,y,0) = C$ für $C = 0$, $C = 9$ und $C = 36$ in der (x,y)-Ebene.

(b) Bestimmen Sie die Richtung des steilsten An- und die des steilsten Abstiegs an der Stelle $\vec{a} = (3,3,0)$ (eine Normierung ist nicht nötig).

(c) Bestimmen Sie an der Stelle $\vec{a}$ die Ableitung von f in Richtung des Vektors $\vec{v} = (3,6,6)$.

(d) Bestimmen Sie die Tangentialhyperebene von f im Punkt $(\vec{a},\ f(\vec{a}))$. Für welche $b \in \mathbb{R}$ liegt der Punkt $(b,0,45,0)$ in der Ebene?

(e) Berechnen Sie näherungsweise mit Hilfe des vollständigen Differentials die relative prozentuale Änderung von $f(\vec{a})$, wenn $\vec{a}$ geändert wird zu $\vec{a}^* = (3.2, 2.9, 0.1)$.

(f) Untersuchen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, ob eine lokale Auflösungsfunktion der Gleichung $f(x,y,z) = 225$ nach x, y und/oder z im Punkt $\vec{a}$ existiert.

Aufgabe 2 (5 + 8 + 12 Punkte)

(a) Berechnen Sie ausführlich - unter Angabe aller Rechenschritte - das uneigentliche Intetegal

$$\int_1^\infty \frac{8x^2}{(2x^3+3)^3}\,dx.$$

(b) Für alle $x \in [0,1]$ gilt $f(x) = \frac{2}{2x+1} + 1 \geq g(x) = x \cdot e^{-2x+2} \geq 0$. Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Funktionen über dem Intervall $[0,1]$. Berechnen Sie ausführlich die zugehörigen Integrale.

(c) Sei $f(x,y) = 2(x-y)^2 + y^2e^y$. Bestimmen Sie die beiden stationären Punkte. Von welcher Art sind diese?

Aufgabe 3 (25 Punkte) Lösen Sie mit Hilfe des Satzes von Karush, Kuhn und Tucker aus der aktuellen Vorlesung/Zentralübung das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= e^{-2x+y^2+6y+z^2-2z} \to \min!\\ g(x,y,z) &= x^2 + 6xyz + y^2 \leq 4\\ x,y,z &\geq 0 \end{aligned}$$

und bestimmen Sie den Wert des Minimums. Überprüfen Sie die LICQ. Begründen Sie jeden Ihrer Schritte und berechnen Sie alle Lagrange-Multiplikatoren.
Hinweis zum Lösen: Warum muss $\lambda_3 \neq 0$ sein?

Bitte beachten Sie die zweite Seite!

Aufgabe 4 (14 + 6 + 5 Punkte)

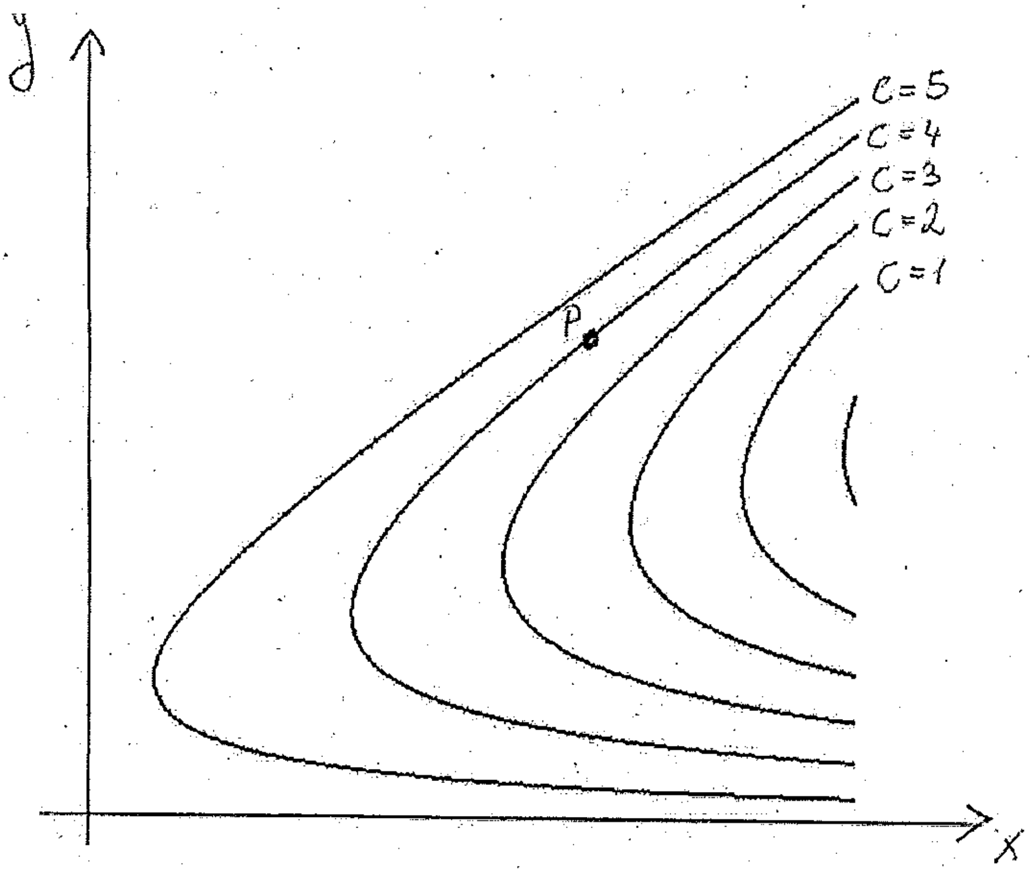
(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Verfahrens von Lagrange, dass die Funktion

$$f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2$$

unter den Nebenbedingungen $x+3y = 30$ und $y+2z = 20$ ein Extremum für $x = 6$ besitzt. Von welcher Art ist dieses? Geben Sie alle zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren an und berechnen Sie den Extremwert.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass die Determinante der zugehörigen Hesse-Matrix den Wert 100 hat.

(b) Berechnen Sie näherungsweise mit dem Umhüllendensatz, um welchen Wert sich das Extremum aus (a) ändert, wenn statt f die Funktion $\tilde{f}(x,y,z) = x^2 + 3(y-0,1)^2 + 2z^2$ und die geänderte Nebenbedingung $x + 3y + 0,1z = 30$ betrachtet wird.

(c) Zu einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gebe es folgende Abbildung der Höhenlinien



(i) Welches Vorzeichen haben die partiellen Ableitungen f_x und f_y im Punkt P?

(ii) Markieren Sie auf der Höhenlinie zum Niveau $C = 5$ einen Punkt, an dem es keine lokale Auflösungsfunktion nach y gibt (Begründung angeben).

(iii) Skizzieren Sie eine Höhenlinie einer Funktion $h(x,y)$ so, dass der Punkt P **eindeutige** Lösung des **Maximierungs**problems für f unter der Nebenbedingung $h(x,y) = r$ ist (r sei eine vorgebene Zahl).