Klausur zur MATHEMATIK 2 für Studierende der Wirtschaftswissenschaften
am Donnerstag, den 24. Juli 2014, 09:00–11:00 Uhr

Aufgabe 1 (3 + 5 + 5 + 5 + 7 Punkte) Gegeben sei die Funktion dreier Veränderlicher

$$f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

(a) Geben Sie die Definitionsmenge von f an und untersuchen Sie f auf Homogenität.

(b) Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs an der Stelle $\vec{b} = (1,\, 2,\, -1)$ (eine Normierung ist nicht nötig).

Eine weitere Funktion $g(x, y, z, u) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ hat an der Stelle $\vec{a} = (0,\, 1,\, 1,\, 3)$ den Gradienten $\overrightarrow{\text{grad}}\; g(\vec{a}) = (-1,\, 0,\, 2,\, 2)$ und den Funktionswert $v = g(\vec{a}) = 4$.

(c) Berechnen Sie näherungsweise mit Hilfe des vollständigen Differentials die relative prozentuale Änderung von $g(\vec{a})$, wenn $\vec{a}$ geändert wird zu $\vec{a}^* = (-0.1,\, 0.9,\, 1.2,\, 2.9)$.

(d) Bestimmen Sie die Tangentialhyperebene von g im Punkt $(\vec{a},\, g(\vec{a}))$. Für welche $b \in \mathbb{R}$ liegt der Punkt $(0, 2, 1, -1, b)$ in der Ebene?

(e) Untersuchen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, nach welchen der Variablen x, y, z, u eine lokale Auflösungsfunktion der Gleichung $g(x, y, z, u) = 4$ im Punkt $\vec{a}$ existiert. Die lokale Auflösungsfunktion nach z bezeichnen wir mit $h(x, y, u)$. Berechnen Sie (falls möglich) $\overrightarrow{\text{grad}}\; h(0,\, 1,\, 3)$.

Aufgabe 2 (13 + 12 Punkte)

(a) Berechnen Sie ausführlich - unter Angabe aller Rechenschritte - die beiden Integrale

$$(i) \int_0^{\infty} \frac{2x^2}{(x^3+1)^4}\, dx, \qquad (ii) \int_0^1 (1+x) \cdot 2^x\, dx.$$

(b) Berechnen Sie unter Verwendung der Kettenregel die 1. Ableitung der Funktion $h(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$ an der Stelle $t_0 = 2$, wobei $f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot e^{-2xy}$ und $\big(x(t), y(t)\big) = (t^2, \sqrt{2 \cdot t})$ ist (ohne $h(t)$ explizit zu berechnen!). Fassen Sie soweit wie möglich zusammen.

Aufgabe 3 (9 + 16 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die beiden stationären Punkte von $f(x, y) = x^2 - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2$. Von welcher Art sind diese?

(b) Gegeben seien die Funktion $g(x, y, z) = x + y + z^2$ und die Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Zeigen Sie mit Hilfe des Verfahrens von Lagrange, dass der Punkt $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ stationärer Punkt von g unter der NB ist. Von welcher Art ist das Extremum? Geben Sie den zugehörigen Lagrange-Multiplikator und auch die Hesse-Matrix an und berechnen Sie den Extremwert.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass die Determinante der zugehörigen Hesse-Matrix den Wert $-8(1+\sqrt{2})$ hat.

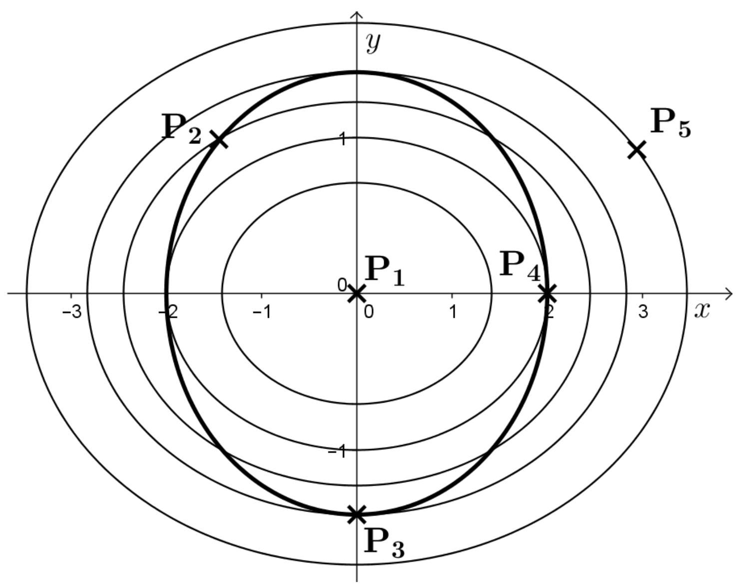
Aufgabe 4 (17 + 8 Punkte)

(a) Lösen Sie mit Hilfe des Satzes von Karush, Kuhn und Tucker aus der aktuellen Vorlesung/Zentralübung das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} f(x,y) &= -x^2 - 8x + y^2 - y + 4 \to \text{min!} \\ g(x,y) &= x^2 - 4 \leq 0 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

und bestimmen Sie den Wert des Minimums. Überprüfen Sie die LICQ. Begründen Sie jeden Ihrer Schritte und berechnen Sie alle Lagrange-Multiplikatoren.

(b) Die folgende Abbildung zeigt die Höhenlinien einer Funktion $f(x,y)$ und die Kurve $g(x,y) = 0$ (**dicke Linie**). Zusätzlich sei vorausgesetzt, dass alle Höhenlinien den Ursprung umschließen und in jedem beliebigen Punkt $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ mit $f(x_0, y_0) = c$ der **Gradient stets nach außen zeigt**, bezogen auf die Höhenlinie $f(x,y) = c$.



(i) Ordnen Sie die Punkte P_1 bis P_5 aufsteigend nach ihren zugehörigen Funktionswerten $f(x,y)$.

(ii) Begründen Sie für $\vec{grad}\, f(P_5)$ welches Vorzeichen die x- bzw. die y-Kompoente hat.

(iii) Begründen Sie, in welchen der Punkte P_1 bis P_5 für $f(x,y)$ ein globales Maximum oder Minimum vorliegt.

(iv) Begründen Sie, in welchem der Punkte P_1 bis P_5 für $f(x,y)$ ein lokales Minimum bzw. lokales Maximum unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ vorliegt.