Klausur Schließende Statistik am 07.02.2013

- Bitte runden Sie Ihre Ergebnisse und Zwischenergebnisse auf jeweils vier Nachkommastellen. -

Aufgabe 1 (16 Punkte)

Die täglichen Renditen des *DAX30* seien mit X bezeichnet und normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 0$ und Standardabweichung $\sigma = 0,0157$, also $X \sim N(0; 0,0157^2)$.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit — 3 P

- einer negativen Rendite,
- für eine Rendite größer 0,01,
- für eine Rendite kleiner -0,05?

b) Welche Rendite wird mit 90%iger Wahrscheinlichkeit nicht unterschritten? — 2 P

c) Innerhalb welcher zentraler Grenzen bewegen sich die Renditen mit 99%iger Wahrscheinlichkeit? — 2 P

d) Ein Finanzmarktanalyst untersucht nun die tatsächlich realisierten täglichen Renditen des *DAX30* über einen Zeitraum vom 01.01.2000 bis zum 30.10.2013 und erhält somit $n = 3608$ Beobachtungen. Er stellt weiterhin fest, dass Mittelwert und Stichprobenstandardabweichung nicht von den oben angegebenen Werten für μ und σ abweichen. Zusätzlich stellt er fest, dass an 76 Tagen die Renditen kleiner als -0,05 waren. Vergleichen Sie diesen Wert mit der in Aufgabenteil a) berechneten erwarteten Wahrscheinlichkeit unter Normalverteilung. Wie lässt sich der Unterschied erklären und was lässt sich hieraus über die Angemessenheit der Normalverteilung zur Modellierung von Renditen schließen? — 2 P

e) ea) Der Analyst zieht nun zusätzlich die Renditen des *Dow Jones*, welche mit Y bezeichnet werden, für den gleichen Zeitraum heran. Wiederum wird davon ausgegangen, dass die Renditen normalverteilt sind. Aus den beiden Stichproben errechnet er einen empirischen Korrelationskoeffizienten von $r = 0,61$. Testen Sie auf lineare Unabhängigkeit der Renditen von *DAX30* und *Dow Jones* für $\alpha = 0,01$. Lässt sich auf Basis des Testergebnisses etwas darüber aussagen, welche Reihe kausal für die andere ist? — 1 P

eb) Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y unter der Annahme, dass der empirische Korrelationskoeffizient aus Aufgabenteil ea) dem theoretischen Korrelationskoeffizienten entspricht und die Standardabweichung von Y 0,0129 beträgt. — 1 P

f) Der Analyst stellt weiterhin fest, dass der *DAX30* an 1666 Tagen eine negative Rendite aufweist. An 1086 dieser Tage wurden auch für den *Dow Jones* negative Renditen beobachtet. An 1280 Tagen wiesen sowohl der *DAX30*, als auch der *Dow Jones* eine nichtnegative Rendite auf. Testen Sie mit dem χ^2-Unabhängigkeitstest auf stochastische Unabhängigkeit von X und Y zum Niveau $\alpha = 0,05$. — 5 P

Aufgabe 2 (14 Punkte)

Betrachten Sie die einfache Zufallsstichprobe $X_1, \ldots, X_n$ mit $E(X_i) = \mu \; \forall i$ und $Var(X_i) = \sigma^2 \; \forall i$ und die beiden Schätzfunktionen g_1, g_2 für den Parameter $E(X) = \mu$ der Grundgesamtheit:

$$g_1 = X_1, \quad g_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}.$$

a) Berechnen Sie den Bias, die Varianz und den mittleren quadratischen Fehler dieser Schätzfunktionen. Ist eine der beiden Schätzfunktionen immer der anderen vorzuziehen? 4 P

b) Betrachten Sie nun die Schätzfunktion $g_3 = \sum_{i=1}^{n-1} X_i / a$, wobei $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter aus den rellen Zahlen darstellt. 2 P

   ba) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von g_3 in Abhängigkeit von a.

   bb) Wie muss a gewählt werden, damit g_3 einen Bias von Null hat?

c) Eine weitere Schätzfunktion lautet $g_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. Weiterhin wird eine Stichprobe von $n = 10$ mit den folgenden Realisationen erhoben: $(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) = (1, 2, \ldots, 10)$. Berechnen Sie das 90%-Konfidenzintervall für μ, wenn 4 P

   ca) $\sigma = 3,0277$ bekannt ist und nichts über die Verteilung von X bekannt ist,

   cb) $\sigma = 3,0277$ bekannt ist und X normalverteilt ist,

   cc) σ unbekannt ist und X normalverteilt ist.

   cd) Vergleichen Sie die Konfidenzintervalle miteinander. Was fällt Ihnen auf und wie lassen sich die Ergebnisse erklären?

d) Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort in 1-2 Sätzen. 4 P

   da) Ist eine Schätzfunktion stark konsistent, so ist der MSE immer gleich Null.

   db) Verzerrte Schätzer können nicht effizient sein.

   dc) Für $n \to \infty$ nähert sich der Wert der Schätzfunktion immer stärker dem zu schätzenden Parameter der Grundgesamtheit an.

   dd) Eine Schätzfunktion, die nur eine Beobachtung aus einer Stichprobe berücksichtigt, kann nie erwartungstreu sein.

Aufgabe 3 (18 Punkte)

a) Die absoluten Häufigkeiten des Wertes des $/€-Wechselkurses ($X$) auf täglicher Basis über die letzten 20 Jahre sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

	$-\infty < X \leq 1$	$1 < X \leq 1,2$	$1,2 < X \leq 1,4$	$1,4 < X < \infty$
beobachtete Häufigkeit	724	653	1246	568

aa) Testen Sie zum Niveau $\alpha = 0,05$, ob X normalverteilt ist. Die Punktschätzer aus dem Datensatz sind gegeben durch $\hat{\mu} = \bar{x} = 1,22$ und $\hat{\sigma} = 0,19$. 6 P

ab) Inwiefern ließe sich beim Testen allgemein die Testentscheidung zugunsten der Nullhypothese manipulieren und warum? 2 P

ac) Fördert die Manipulation der Testentscheidung zugunsten der Nullhypothese den Fehler 1. oder 2. Art? Erläutern Sie kurz, was der Fehler 2. Art ist. 2 P

b) ba) Es wird nun von einem Ökonom behauptet, dass man im Erwartungswert pro Euro mehr als einen Dollar enthält, also dass $E(X) > 1$ ist. Testen Sie diese Hypothese für $\alpha = 0,01$, wobei wiederum $\hat{\mu} = \bar{x} = 1,22$ und $\hat{\sigma} = 0,19$ ist. 2 P

bb) Ein weiterer Ökonom nimmt an, dass die Anzahl des Eintretens des Ereignisses mehr als einen Dollar pro Euro zu erhalten, binomialverteilt ist. Testen Sie für $\alpha = 0,05$ die Hypothese, dass die Eintrittswahrscheinlichkeit 50% beträgt. 2 P

bc) Testen Sie die Hypothese unter bb) für $\alpha = 0{,}2$ erneut auf Basis der Stichprobe: 4 P
$X = (1{,}3;\ 0{,}9;\ 1{,}1;\ 1{,}4;\ 1{,}1;\ 0{,}8)$.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Zum heutigen Beginn der XXII. Olympischen Winterspiele in Sotschi hegt ein Journalist die Vermutung, dass sich eine große Anzahl von Startern positiv auf das Erringen von Medaillen für ein Land auswirkt. Dazu sind die Anzahl der gewonnenen Medaillen und die Anzahl der Starter der zehn erfolgreichsten Nationen der Winterspiele von 2010 gegeben.

	GER	USA	AUT	RUS	CAN	SWE	KOR	SUI	ITA	NED
Anzahl gewonnener Medaillien 2010	30	37	16	15	26	11	14	9	5	8
Anzahl der Starter 2010	153	215	81	177	206	106	46	146	109	34

a) Schätzen Sie ein lineares Regressionmodell mit der KQ-Methode. Die Anzahl der gewonnenen Medaillen fungiert dabei als abhängige und die Anzahl der Starter als unabhängige Variable. 6 P

b) Interpretieren Sie die geschätzten Koeffizienten der Ausgleichsgeraden. 2 P

c) Berechnen Sie das Bestimmtheitsmaß für die in a) berechnete Gerade. Beurteilen und interpretieren Sie die Maßzahl. (Wenn Sie das Bestimmtheitsmaß nicht berechnen konnten, gehen sie von dem Wert 0,48 aus). 4 P