Probeklausur Schließende Statistik am 05.01.2015

- Bitte runden Sie Ihre Ergebnisse und Zwischenergebnisse auf jeweils vier Nachkommastellen. -

Aufgabe 1 (14 Punkte)

Die täglichen Renditen des *DAX30* seien mit X bezeichnet und normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 0$ und Standardabweichung $\sigma = 0,0157$, also $X \sim N(0; 0,0157^2)$.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit — 4,5 P

- einer negativen Rendite,
- für eine Rendite größer 0,01,
- für eine Rendite kleiner -0,05?

b) Welche Rendite wird mit 90%iger Wahrscheinlichkeit nicht unterschritten? — 2,5 P

c) Innerhalb welcher zentraler Grenzen bewegen sich die Renditen mit 99%iger Wahrscheinlichkeit? — 2,5 P

d) Ein Finanzmarktanalyst untersucht nun die tatsächlich realisierten täglichen Renditen des *DAX30* über einen Zeitraum vom 01.01.2000 bis zum 30.10.2013 und erhält somit $n = 3608$ Beobachtungen. Er stellt weiterhin fest, dass Mittelwert und Stichprobenstandardabweichung nicht von den oben angegebenen Werten für μ und σ abweichen. Zusätzlich stellt er fest, dass an 76 Tagen die Renditen kleiner als -0,05 waren. Vergleichen Sie diesen Wert mit der in Aufgabenteil a) berechneten erwarteten Wahrscheinlichkeit unter Normalverteilung. Wie lässt sich der Unterschied erklären und was lässt sich hieraus über die Angemessenheit der Normalverteilung zur Modellierung von Renditen schließen? — 2,5 P

e) Der Analyst zieht nun zusätzlich die Renditen des *Dow Jones*, welche mit Y bezeichnet werden, für den gleichen Zeitraum heran. Wiederum wird davon ausgegangen, dass die Renditen normalverteilt sind. Aus den beiden Stichproben errechnet er einen empirischen Korrelationskoeffizienten von $r = 0,61$. Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y unter der Annahme, dass der empirische Korrelationskoeffizient dem theoretischen Korrelationskoeffizienten entspricht und die Standardabweichung von Y 0,0129 beträgt. — 2 P

Aufgabe 2 (21 Punkte)

Betrachten Sie die einfache Zufallsstichprobe $X_1, \ldots, X_n$ mit $E(X_i) = \mu \; \forall i$ und $Var(X_i) = \sigma^2 \; \forall i$ und die beiden Schätzfunktionen g_1, g_2 für den Parameter $E(X) = \mu$ der Grundgesamtheit:

$$g_1 = X_1, \quad g_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}.$$

a) Berechnen Sie den Bias, die Varianz und den mittleren quadratischen Fehler dieser Schätzfunktionen. Ist eine der beiden Schätzfunktionen immer der anderen vorzuziehen? 5 P

b) Betrachten Sie nun die Schätzfunktion $g_3 = \sum_{i=1}^{n-1} X_i/a$, wobei $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter aus den rellen Zahlen darstellt. 4 P

   ba) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von g_3 in Abhängigkeit von a.

   bb) Wie muss a gewählt werden, damit g_3 einen Bias von Null hat?

c) Eine weitere Schätzfunktion lautet $g_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. Weiterhin wird eine Stichprobe von $n = 10$ mit den folgenden Realisationen erhoben: $(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) = (1, 2, \ldots, 10)$. Berechnen Sie das 90%-Konfidenzintervall für μ, wenn 8 P

   ca) $\sigma = 3,0277$ bekannt ist und nichts über die Verteilung von X bekannt ist,

   cb) $\sigma = 3,0277$ bekannt ist und X normalverteilt ist,

   cc) σ unbekannt ist und X normalverteilt ist.

   cd) Vergleichen Sie die Konfidenzintervalle miteinander. Was fällt Ihnen auf und wie lassen sich die Ergebnisse erklären?

d) Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort in 1-2 Sätzen. 4 P

   da) Ist eine Schätzfunktion stark konsistent, so ist der MSE immer gleich Null.

   db) Verzerrte Schätzer können nicht effizient sein.

   dc) Für $n \to \infty$ nähert sich der Wert der Schätzfunktion immer stärker dem zu schätzenden Parameter der Grundgesamtheit an.

   dd) Eine Schätzfunktion, die nur eine Beobachtung aus einer Stichprobe berücksichtigt, kann nie erwartungstreu sein.

Aufgabe 3 (13 Punkte)

Betrachten Sie die stetige Zufallsvariable X sowie deren Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{3}(x-1)^2 & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 - \frac{1}{6}(4-x)^2 & 2 \leq x \leq b \\ 1 & x > b, \end{cases} \qquad \text{wobei } b \in \mathbb{R}.$$

a) Berechnen Sie die Obergrenze b so, dass $F(x)$ eine gültige Verteilungsfunktion darstellt. 4 P
Hinweis: Wenn Sie Teil a) nicht lösen können, gehen Sie im Folgenden von $b = 4$ aus.

b) Berechnen Sie die Dichtefunktion von X. 3 P

c) Berechnen Sie $P(X < 2)$ und $P(X \geq 4)$. 2 P

d) Berechnen Sie den Median und den Erwartungswert von X. 4 P

Aufgabe 4 (12 Punkte)

a) Die absoluten Häufigkeiten des Wertes des \$/€-Wechselkurses (X) auf täglicher Basis über die letzten 20 Jahre sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

	$-\infty < X \leq 1$	$1 < X \leq 1,2$	$1,2 < X \leq 1,4$	$1,4 < X < \infty$
beobachtete Häufigkeit	724	653	1246	568

aa) Es wird nun von einem Ökonom behauptet, dass man im Erwartungswert pro Euro mehr als einen Dollar erhält, also dass $E(X) > 1$ ist. Testen Sie diese Hypothese für $\alpha = 0,01$, wobei $\hat{\mu} = \bar{x} = 1,22$ und $\hat{\sigma} = 0,19$ ist. 2 P

ab) Ein weiterer Ökonom nimmt an, dass die Anzahl des Eintretens des Ereignisses mehr als einen Dollar pro Euro zu erhalten, binomialverteilt ist. Testen Sie für $\alpha = 0,05$ die Hypothese, dass die Eintrittswahrscheinlichkeit 50% beträgt. 2 P

ac) Testen Sie die Hypothese unter ab) erneut für $\alpha = 0{,}2$ auf Basis der folgenden Stichprobe: $X = (1{,}3;\ 0{,}9;\ 1{,}1;\ 1{,}4;\ 1{,}1;\ 0{,}8)$. 4 P

b) Inwiefern ließe sich beim Testen allgemein die Testentscheidung zugunsten der Nullhypothese manipulieren und warum? 2 P

c) Fördert die Manipulation der Testentscheidung zugunsten der Nullhypothese den Fehler 1. oder 2. Art? Erläutern Sie kurz, was der Fehler 2. Art ist. 2 P