

Aufgabe 1 (6+13+6= 25 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x-3 & x \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & x & 2 \end{pmatrix}$.

- Berechnen Sie ausführlich $\det(A(x))$. Für welche x ist $A(x)$ invertierbar?
 - Invertieren Sie – unter Angabe aller Rechenschritte – die Matrix $A(1)$ und machen Sie die Probe, ob $A(1) \cdot (A(1))^{-1} = E$ gilt.
 - Berechnen Sie die Lösung der Matrizen-Gleichung $A(1)(X - A(1)) + A(1) = E$ mit einer unbekanntem Matrix X und der Einheitsmatrix E .
-

Aufgabe 2 (12+10+3 = 25 Punkte)Gegeben sei das lineare Optimierungsproblem (LOP), mit $x_1, x_2 \geq 0$,

$$\pi(x_1, x_2) = (0, 4+t)x_1 + 4x_2 \rightarrow \max!$$

$$16x_1 + 12x_2 \leq 5100$$

$$0,5x_1 + x_2 \leq 275$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 400$$

$$x_1 \leq 125$$

- Bestimmen Sie für $t = 0$ und $t = 3,6$ graphisch die Lösung des LOP. Ist eine Nebenbedingung überflüssig?
 - Lösen Sie das LOP für $t = 0$ mit Hilfe des Simplex-Algorithmus unter Angabe aller Rechenschritte. Geben Sie in jedem Schritt die Basislösung an.
 - Formulieren Sie das zugehörige duale LOP (mit Parameter t).
-

Aufgabe 3 (8+5+12= 25 Punkte)Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}a_n$, $a_0 \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$.

- Bestimmen Sie die Folgenglieder a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 . Drücken Sie a_{n+1} mit Hilfe von a_0 aus.
- Untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz.
- Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen ($n > 0$) auf Konvergenz und bestimmen Sie im Falle der Konvergenz deren Grenzwert.

$$(1) a_n = \frac{-6n^3 - n^2 + 3}{7n^3 + 5n + \sqrt{n}} \quad (2) a_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-3n}$$

Aufgabe 4 (11+3+5+6=25 Punkte)Gegeben sei die Funktion $f_\alpha(x) = \alpha \cdot x \cdot \sqrt{1+x}$, $\alpha > 0$.

- Geben Sie den Definitionsbereich von f_α an und untersuchen Sie f_α auf Nullstellen und Extrema. Wie lautet der Wertebereich von f_α ?
- Skizzieren Sie die Funktion für $\alpha = 1$.
- Wie muss x gewählt werden, damit für die Funktion an der Stelle x eine Erhöhung von x um 5% eine Erhöhung von y um 2,5% bewirkt? Rechnen Sie mit Hilfe der Elastizität.
- Wie muss $a > 0$ gewählt werden, damit $\int_0^1 f_\alpha(x) dx = 1$ gilt? Führen Sie alle Rechenschritte aus. Hinweis: Partielle Integration.