

Klausur zur MATHEMATIK 1 für Studierende der Wirtschaftswissenschaften
am Samstag, dem 17. Juli 2010, 09:30–11:30 Uhr

Aufgabe 1 (8 + 13 + 4 Punkte) Eine Matrix ist gegeben durch

$$A(a) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & a+2 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- a) Berechnen Sie schriftlich die Determinante. Für welche $a \in \mathbb{R}$ existiert keine Inverse?
Hinweis: Beachten Sie die Struktur der Matrix!
 - b) Berechnen Sie für $a = 1$ unter Angabe aller Rechenschritte $[A(1)]^{-1}$. Machen Sie die Probe!
Hinweis: Beachten Sie auch hier die Struktur der Matrix!
 - c) Lösen Sie für $a = 1$ die Matrixgleichung $A(X - A) = E$, $X \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$, wobei E die Einheitsmatrix bezeichnet.
-

Aufgabe 2 (9 + 13 + 3 Punkte) Gegeben sei das Lineare Optimierungsproblem (LOP)

$$\begin{aligned} \pi(x, y) &= 4 \cdot x + y \rightarrow \max! \\ -x + y &\leq 3, \\ 3x + y &\leq 15, \\ 3x - y &\leq 9, \\ y &\leq 5, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

- a) Lösen Sie das LOP graphisch.
 - b) Lösen Sie das LOP mit dem Simplex-Algorithmus unter Angabe aller Rechenschritte.
Geben Sie in jedem Schritt auch die Basislösung an.
 - c) Wie lautet das zugehörige duale LOP?
-

Aufgabe 3 (10 + 10 + 5 Punkte)

- a) Berechnen Sie ausführlich

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^{i-1}} \left(\frac{1}{3^i} + \frac{(-4)^{i+1}}{3^{i+1}} \right) \right].$$

- b) Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $a_{n+1} = -\frac{2}{3}a_n + 1$, $a_0 \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$. Geben Sie alle Folgenglieder bis a_4 mit Hilfe von a_0 an. Drücken sie a_n mit Hilfe von a_0 aus und untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz.
- c) Bestimmen Sie ausführlich den Grenzwert der Folge

$$a_n = \frac{\sqrt{9n^2 - 1} + n}{\sqrt{6n^2 + 1} + 2n}, \quad n \geq 1.$$

Beachten Sie die Rückseite!!!

Aufgabe 4 (14 + 5 + 6 Punkte) Sei die Funktion

$$f_a(x) = (x - 1) \cdot e^{2-ax}, \quad x \geq 0,$$

mit einem reellen Parameter $a > 0$ gegeben.

- a) Untersuchen Sie $f_a(x)$ auf Nullstellen, Extremwerte und Monotonie sowie das Verhalten für $x \rightarrow \infty$. Skizzieren Sie für $a = 1$ die Funktion $f_1(x)$ im Bereich $0 \leq x \leq 4$.
- b) Bestimmen Sie a mittels der Elastizität derart, dass an der Stelle $x = 3$ eine **Erhöhung** um 4% von x angenähert eine **Erniedrigung** um 5% von $f_a(3)$ bewirkt.
- c) Berechnen Sie für $a = 1$ ausführlich das Integral $\int_0^\infty f_1(x) dx$.
Hinweis: Partielle Integration.