

Klausur zur MATHEMATIK 1 für Studierende der Wirtschaftswissenschaften
am Dienstag, den 07. Juni 2011, 16:00–18:00 Uhr

Aufgabe 1 (7 + 9 + 2 + 7 Punkte) Gegeben seien drei Vektoren, die von einem Parameter $t \in \mathbb{R}$ abhängen.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ t-3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ t-7 \end{pmatrix}.$$

- a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren linear abhängig? Geben Sie alle Rechenschritte an.
Hinweis: Betrachten Sie eine zugehörige Determinante.
 - b) Sei $A(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ die Matrix, die spaltenweise aus den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gebildet wird. Berechnen Sie unter Angabe aller Rechenschritte $[A(2)]^{-1}$. Machen Sie die Probe!
 - c) Wie lautet die Inverse zu $[A(2)]^2$?
 - d) Lösen Sie für $t = 2$ die Matrizen-Gleichung $A^2(E - 2A^{-1}X) + AX = A^{-1}$ mit einer unbekanntem Matrix X und der Einheitsmatrix E .
-

Aufgabe 2 (9 + 16 Punkte) Gegeben sei das Lineare Optimierungsproblem (LOP)

$$\begin{aligned} \pi(x, y) = x + 4y &\rightarrow \max! \\ x + 2y &\leq 18, \\ -2x + y &\leq 2, \\ 2x - y &\leq 16, \\ y &\leq 6, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

- a) Lösen Sie das LOP graphisch.
 - b) Lösen Sie das LOP mit dem Simplex-Algorithmus unter Angabe aller Rechenschritte.
Geben Sie in jedem Schritt die Basislösung an.
-

Aufgabe 3 (10 + 10 + 5 Punkte)

- a) Berechnen Sie ausführlich

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^{i-1}} \left(\frac{1}{4^i} - \frac{(-2)^{i+1}}{5^i} \right) \right].$$

- b) Eine rekursiv definierte Folge ist gegeben durch $a_{n+1} = \frac{a_n}{2(n+1)}$, $a_0 \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$. Geben Sie alle Folgenglieder bis a_4 in Abhängigkeit von a_0 an. Drücken Sie a_{n+1} mit Hilfe von a_0 aus und untersuchen Sie die Folge auf Monotonie und Konvergenz.
- c) Ein Anfangskapital von $S_0 = 5.000$ Euro werde **stetig (kontinuierlich)** zu einem jährlichen Zinssatz von 4% verzinst.
 1. Berechnen Sie das Endkapital nach 10 Jahren.
 2. Wie lange dauert es, bis dieses Anfangskapital das Endkapital von 15.000 Euro erreicht hat.

Bitte beachten Sie die zweite Seite!

Aufgabe 4 (14 + 7 + 4 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $f_a(x) = x^3 - ax - 2$, die von einem reellen Parameter $a > 0$ abhängt.

- a) Untersuchen Sie $f_a(x)$ auf Monotonie, Extrema und Konvexität in Abhängigkeit von a .
- b) Sei $a = 6$. Zeigen Sie mit Hilfe einer Skizze, dass $f_6(x)$ nur eine Nullstelle für $x > 0$ besitzt. Führen Sie zwei Schritte mit dem Newton-Verfahren durch, um die Nullstelle in der Nähe von $x = 3$ anzunähern.
Hinweis: Nehmen Sie als Startwert $x_0 = 3$ und rechnen Sie auf 4 Stellen hinter dem Komma genau.
- c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Elastizität den Wert des Parameters a so, dass an der Stelle $x = 1$ eine 3%-ige Erhöhung von x eine 4%-ige Senkung von f_a bewirkt.