

Aufgabe 1 (8+12+5= 25 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & x \\ x & 2 & -3 \\ -5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

und ein Vektor $\mathbf{b} = (1, 1, 2)^T$.

- Sei E die Einheitsmatrix und $C(x) := E - A(x)$. Berechnen Sie ausführlich $\det(C(x))$. Für welche x ist $C(x)$ invertierbar?
 - Invertieren Sie – unter Angabe aller Rechenschritte – die Matrix $C(2)$ und machen Sie die Probe, ob $C(2) \cdot (C(2))^{-1} = E$ gilt.
 - Berechnen Sie die Lösung von $\mathbf{x} = A(2)\mathbf{x} + \mathbf{b}$.
-

Aufgabe 2 (12+13 = 25 Punkte)Gegeben sei das lineare Optimierungsproblem (LOP), mit $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$,

$$\pi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \max!$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 20$$

$$x_1 - x_2 + x_4 \leq 60 + t$$

- Lösen Sie das LOP für $t > -40$ mit Hilfe des Simplex-Algorithmus unter Angabe aller Rechenschritte. Geben Sie in jedem Schritt die Basislösung an.
 - Formulieren Sie das zugehörige duale LOP und bestimmen Sie graphisch die Lösung für $t = 0$ und $t = -50$ in zwei Koordinatensystemen.
-

Aufgabe 3 (6+4+15= 25 Punkte)Gegeben sei die rekursive Folge $a_{n+1} = \frac{-a_n}{n+1}$, $a_0 > 0$, $n \geq 0$.

- Bestimmen Sie die Folgenglieder a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 . Drücken Sie a_n mit Hilfe von $a_0 > 0$ aus.
- Untersuchen Sie die Folge auf Monotonie und Konvergenz.
- Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen ($n \geq 0$) auf Konvergenz und bestimmen Sie im Falle der Konvergenz deren Grenzwert.

$$(1) a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2, a_0 \in \mathbb{R},$$

$$(2) a_n = \sqrt{4n^2 + 5} - 2n$$

Aufgabe 4 (8+4+5+8=25 Punkte)Gegeben sei die Funktion $f_a(x) = a \cdot x \cdot e^{\frac{-x}{a}}$,die von einem reellen Parameter $a \neq 0$ abhängt.

- Geben Sie den Definitionsbereich von f_a an und untersuchen Sie f_a auf Nullstellen und lokale Extrema.
- Skizzieren Sie die Funktion für $a = 1$ und $a = -1$.
- Wie muss a gewählt werden, damit für $f_a(x)$ an der Stelle $x = 2$ eine Erhöhung von x um 2,5% eine Erhöhung von y um 5% bewirkt? Rechnen Sie mit Hilfe der Elastizität.
- Wie muss a gewählt werden, damit $\int_0^a f_a(x) dx = 1$ gilt? Führen Sie alle Rechenschritte aus. Hinweis: Partielle Integration.