

Klausur zur MATHEMATIK 1 für Studierende der Wirtschaftswissenschaften
am Mittwoch, dem 04. Februar 2009, 09:00–11:00 Uhr

Aufgabe 1 (7+11+3+4 Punkte) Eine Matrix ist gegeben durch

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 - \alpha & 5 & 2 \\ 1 - \alpha & \alpha & -4 \\ 3 & 13 & 15 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- a) Berechnen Sie schriftlich die Determinante. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert keine Inverse?
 - b) Berechnen Sie unter Angabe aller Rechenschritte $A(1)^{-1}$. Machen Sie die Probe!
 - c) Wie lautet die Inverse zu $A(1)^2$?
 - d) Lösen Sie für $\alpha = 1$ die Matrixgleichung $(A - 2X)A^2 + XA^2 = A$, $X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.
-

Aufgabe 2 (14+11 Punkte) Gegeben sei das Lineare Optimierungsproblem (LOP) mit einem reellen Parameter t

$$\begin{aligned} \pi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 2x_1 + x_2 + 6x_3 + t \cdot x_4 \rightarrow \max! \\ x_1 + x_3 - 2x_4 &\leq 4, \\ x_2 + x_3 + x_4 &\leq 1, \\ x_i &\geq 0 \quad (i = 1, \dots, 4). \end{aligned}$$

- a) Sei $0 < t < 6$. Lösen Sie das LOP mit dem Simplex-Algorithmus unter Angabe aller Rechenschritte. Geben Sie in jedem Schritt die Basislösung an.
 - b) Wie lautet das zugehörige duale LOP? Lösen Sie dieses graphisch für $t = -2$.
-

Aufgabe 3 (11+14 Punkte)

- a) Berechnen Sie ausführlich

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{5^i} \left(\frac{1}{2^{i+1}} + \frac{2^{i-1}}{3^{i-1}} \right) \right].$$

- b) Eine rekursiv definierte Folge mit $a_0 = 0,5$ ist gegeben durch $a_{n+1} = a_n + (-r)^{n+1}$, $r \in \mathbb{R}$.
 1. Untersuchen Sie die Folge auf Monotonie. Geben Sie alle Folgenglieder bis a_4 an.
 2. Für welche $r \in \mathbb{R}$ ist die Folge konvergent? Bestimmen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert.
-

Aufgabe 4 (11+8+6 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $f_a(x) = -x^3 + ax^2 + 1$ mit einem reellen Parameter $a > 0$.

- a) Untersuchen Sie $f_a(x)$ auf Extremwerte, Monotonie und Konvexität.
- b) Sei $a = 5$. Begründen Sie mit Hilfe von a), dass $f_5(x)$ nur eine Nullstelle $x > 0$ besitzt. Führen Sie zwei Schritte mit dem aus der Vorlesung bekannten Newton-Verfahren durch, um die Nullstelle in der Nähe von $x = 5$ anzunähern.
Hinweis: Nehmen Sie als Startwert $x_0 = 5$ und rechnen Sie auf 6 Stellen hinter dem Komma genau.
- c) Wie muss a gewählt werden, damit die Fläche zwischen dem Graphen von f_a und der x -Achse im Intervall $[0,3]$ einen Flächeninhalt von 30 hat? Fertigen Sie eine Skizze an, in der die gesuchte Fläche markiert ist.