

Klausur zur MATHEMATIK 1 für Studierende der Wirtschaftswissenschaften
am Mittwoch, dem 09. Februar 2011, 09:00–11:00 Uhr

Aufgabe 1 (6 + 13 + 6 Punkte) Eine Matrix ist gegeben durch

$$A(r) = \begin{pmatrix} 3 & -r-1 & -2 \\ 0 & -1 & -2r \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

- a) Berechnen Sie ausführlich $\det(A(r))$. Für welche r ist $A(r)$ nicht invertierbar?
 - b) Sei $r = 1$. Berechnen Sie unter Angabe aller Rechenschritte $[A(1)]^{-1}$. Machen Sie die Probe!
 - c) Lösen Sie für $r = 1$ die Matrizen-Gleichung $A(1)(A(1) + X) + E = A(1)$ mit einer unbekannten Matrix X und der Einheitsmatrix E .
-

Aufgabe 2 (13 + 12 Punkte) Gegeben sei das Lineare Optimierungsproblem (LOP) mit einem reellen Parameter t

$$\begin{aligned} \pi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= t \cdot x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 6x_4 \rightarrow \max! \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 &\leq 4, \\ x_1 + x_2 + x_4 &\leq 8, \\ x_i &\geq 0 \quad (i = 1, \dots, 4). \end{aligned}$$

- a) Sei $0 < t < 1$. Lösen Sie das LOP mit dem Simplex-Algorithmus unter Angabe aller Rechenschritte. Geben Sie in jedem Schritt die Basislösung an.
 - b) Wie lautet das zugehörige duale LOP? Lösen Sie dieses graphisch für $t = 1$.
-

Aufgabe 3 (6 + 11 + 8 Punkte)

- a) Bestimmen Sie ausführlich zu der unten stehenden Folge den Grenzwert

$$a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n/2} \cdot \frac{2n^3 - 4n + 5}{3n^3 + 2n^2 - 1}, \quad n > 0.$$

- b) Eine rekursiv definierte Folge ist gegeben durch $a_{n+1} = a_n + (-\frac{1}{2})^{n-1}$, $a_0 \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$. Untersuchen Sie die Folge auf Monotonie. Geben Sie alle Folgenglieder bis a_4 in Abhängigkeit von a_0 an. Drücken Sie a_{n+1} mit Hilfe von a_0 aus und untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz.
 - c) Ein Student zahlt auf seinen Sparvertrag jedes Jahr zum 1. Januar 1.500 Euro ein. Mit seiner Bank hat er einen jährlichen Zinssatz in Höhe von 4 % vereinbart.
 1. Wie groß ist sein Kapital direkt nach der 10. Einzahlung?
 2. Wie viel Geld hätte er am Anfang einmalig mit 4% anlegen müssen, um zu Beginn des 10. Jahres auf denselben Endbetrag zu kommen?
-

Aufgabe 4 (15 + 3 + 7 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x^2 e^{1-x}$, $x \geq 0$.

- a) Untersuchen Sie $f(x)$ auf Nullstellen, Extrema, Monotonie und Konvexität. Berechnen Sie ausführlich die Ableitungen!
- b) Skizzieren Sie den Graphen von f im Bereich $0 \leq x \leq 5$.
- c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Elastizität ungefähr die Stelle, wo eine 2%-ige Erhöhung von x eine 5%-ige Senkung von f bewirkt.
In welchem Bereich ist f elastisch, wo unelastisch?