

Klausur zur MATHEMATIK 1 für Studierende der Wirtschaftswissenschaften
am Mittwoch, den 01. Februar 2012, 11:00–13:00 Uhr

Aufgabe 1 (7 + 11 + 7 Punkte) Eine Matrix und ein Vektor sind gegeben durch

$$A(r) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & r & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(r) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ r \\ -1 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

- a) Berechnen Sie schriftlich die Determinante von $A(r)$. Für welche $r \in \mathbb{R}$ existiert keine Inverse?
Hinweis: Beachten Sie die Struktur der Matrix.
- b) Für welche $r \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem $A(r)\vec{x} = \vec{b}(r)$ keine Lösung, genau eine Lösung bzw. eine Parameterschar als Lösung? Benutzen Sie den Gauß-Algorithmus.
- c) Berechnen Sie ausführlich die Lösungen für $r = 3$ und $r = 3.25$.
-

Aufgabe 2 (12 + 13 Punkte) Gegeben sei das Lineare Optimierungsproblem (LOP) mit einem reellen Parameter t und $x_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, 4$)

$$\begin{aligned} \pi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 8x_1 - 7x_2 + 10x_3 + 2x_4 \rightarrow \max! \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 &\leq t, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 1. \end{aligned}$$

- a) Sei $t = 1$. Lösen Sie das LOP mit dem Simplex-Algorithmus unter Angabe aller Rechenschritte. Geben Sie in jedem Schritt die Basislösung an.
- b) Wie lautet das zugehörige duale LOP für $t \in \mathbb{R}$? Lösen Sie dieses graphisch für $t = 1$. Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist der Punkt $(4.5; 2)$ Lösung?
-

Aufgabe 3 (8 + 8 + 9 Punkte)

- a) Berechnen Sie ausführlich zu den unten stehenden Folgen den Grenzwert ($n > 0$)

$$a_n = (n - \sqrt{n^2 + 5}) \cdot \left(1 - \frac{2}{5n}\right)^{5n}, \quad b_n = \frac{-3n^4 + n^2 - \sqrt{n}}{5n^4 - 5n^3 + 7}.$$

- b) Berechnen Sie ausführlich

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{5}{2^{i+1}} \left(\frac{1}{(-3)^i} - \frac{1}{4^{i-1}} \right) \right].$$

- c) Eine rekursiv definierte Folge ist gegeben durch $a_{n+1} = a_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{a_0}{2}\right)^n$, $a_0 \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$. Geben Sie alle Folgenglieder bis a_3 in Abhängigkeit von a_0 an. Drücken Sie a_{n+1} mit Hilfe von a_0 aus und untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz. Geben Sie im Falle von Konvergenz den Grenzwert an.

Bitte beachten Sie die zweite Seite!

Aufgabe 4 (13 + 6 + 6 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $f_a(x) = (x^2 - ax)e^{-x+1}$, die von einem reellen Parameter $a > 0$ abhängt.

- a) Sei $a = 1$. Untersuchen Sie $f_1(x)$ auf Nullstellen, Extrema und Monotonie sowie das Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$. Berechnen Sie ausführlich die benötigten Ableitungen.
Hinweis: Rechnen Sie auf vier Stellen genau.
- b) Sei $a = 1$. Skizzieren Sie den Graphen von f_1 im Bereich von $-1 \leq x \leq 5$.
 f_1 hat die beiden Wendestellen bei $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$. In welchen Bereichen ist f_1 konvex/konkav?
- c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Elastizität den Wert des Parameters a so, dass an der Stelle $x = 1$ eine 2%-ige Erhöhung von x näherungsweise eine 4%-ige Erhöhung von f_a bewirkt.