Klausur zur MATHEMATIK 1 für Studierende der Wirtschaftswissenschaften
am Mittwoch, den 05. Februar 2014, 11:00–13:00 Uhr

Aufgabe 1 ($9 + 3 + 2 + 6 + 5 = 25$ Punkte) Eine Matrix und ein Vektor seien gegeben durch

$$A(r,s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & r & s \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(r) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ r \end{pmatrix}, \qquad r,\, s \in \mathbb{R}.$$

(a) Für welche Werte r, s besitzt das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ keine, genau eine bzw. mehrere Lösungen? Benutzen Sie den Gauß-Algorithmus und begründen Sie mit dem Rang.

(b) Lösen Sie das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ für $r = s = 1$ und für $r = s = 0$.

(c) Berechnen Sie die Determinante von $A(r,s)$.

(d) Für eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gelte $\operatorname{rang} C = n - 1$. Geben Sie drei verschiedene Folgerungen an.

(e) Seien $F,\, G,\, H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbare Matrizen. Lösen Sie folgende Gleichung allgemein nach der Matrix $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ auf.

$$(HXG + 2F)G^{-2} + HXG^{-1} = F.$$

Aufgabe 2 ($11 + 11 + 3 = 25$ Punkte) Gegeben sei das Lineare Optimierungsproblem (LOP) mit einem Parameter $t \in \mathbb{R}$ und $x,\, y \ge 0$

$$\begin{aligned} \pi(x,\, y) = tx + 4y &\to \max! \\ -x + y &\le 4, \\ x + 2y &\le 17, \\ x - 2y &\le 5, \\ x &\le 7. \end{aligned}$$

(a) Sei $t = -2$. Lösen Sie das LOP graphisch. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der zum Optimalpunkt gehörenden Geraden rechnerisch. Für welches $t \in \mathbb{R}$ ist der Punkt $(5; 6)$ eine Lösung?

(b) Sei $t = -2$ Lösen Sie das LOP mit dem Simplex-Algorithmus unter Angabe aller Rechenschritte. Geben Sie in jedem Schritt die zugehörige Basislösung an.

(c) Wie lautet das zugehörige duale LOP für beliebiges t?

Bitte beachten Sie die zweite Seite!

Aufgabe 3 (7 + 9 + 6 + 3 = 25 Punkte)

(a) Berechnen Sie ausführlich

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^{k+1}}{4^{k-1} \cdot 5^k}.$$

(b) Eine rekursiv definierte Folge ist gegeben durch

$$a_{n+1} = a_n + \left(\frac{a_0}{7}\right)^n, \; a_0 \in \mathbb{R}, n \geq 0.$$

Für welche Werte a_0 ist die Folge streng monoton wachsend?
Geben Sie alle Folgenglieder bis a_3 in Abhängigkeit von a_0 an. Drücken Sie a_{n+1} mit Hilfe von a_0 aus. Für welche Werte a_0 ist die Folge konvergent? Geben Sie für $a_0 = 3$ den Grenzwert an.

(c) Bestimmen Sie ausführlich den Grenzwert der Folge

$$b_n = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2n}\right)^{2n} + \sqrt{9n^2 + 2} - 3n - e^{\sqrt{2}}$$

(d) Ein Student zahlt am 1.1.2014 einen Betrag von 500 € auf ein Bankkonto ein. Das Geld wird zu einem jährlichen Zinssatz in Höhe von 0.5 % verzinst und jeweils am 31.12. gut geschrieben. Wieviel Geld hat er am 1.1.2020? Wie lange muss er warten, bis sich das Kapital verdoppelt hat?

Aufgabe 4 (15 + 5 + 5 = 25 Punkte)

(a) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x^5 - 8x^2$ für $x \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen, Extremwerte, Monotonie, Konvexität und das Verhalten für $x \to \pm\infty$. Geben Sie auch die Extremwerte an.

(b) Begründen Sie, dass die Funktion $g(x) = \frac{3}{1+x^2} - 2^x$ mindestens eine Nullstelle im Intervall $[0, 2]$ besitzt. Zur Näherung dieser Nullstelle rechnen Sie einen Schritt mit dem Newton-Verfahren. Als Startwert nehmen Sie $x_0 = 0$.

(c) Sei $h(x) = x^2 \cdot e^{2x-3}$. Bestimmen Sie näherungsweise mit Hilfe der Elastizität, an welcher Stelle x eine Erhöhung um 3 % von x eine 2 %-ige Senkung des Funktionswertes bewirkt.