Klausur zur MATHEMATIK 2 für Studierende der Wirtschaftswissenschaften

am Donnerstag, dem 24. Juli 2008, 09:00 – 11:00 Uhr

Aufgabe 1 (5+5+7+4+4= 25 Punkte)

Gegeben sei die Funktion zweier Veränderlicher mit einem reellen Parameter $a > 0$

$$z = f_a(x,y) := \sqrt{x^2 + 4y^2} + a \cdot \ln(x^2 + 2y^2)$$

und ein Vektor $\boldsymbol{b} = (1,0)$.

a) Geben Sie die Definitionsmenge von f_a für $a = 0$ und $a \neq 0$ an. Für welche a ist f_a homogen?

b) Bestimmen Sie für $a = 0$ eine Gleichung für die Niveaulinien von f_0 und skizzieren Sie die Niveaus $C = 0$, $C = 1$ und $C = 2$.

c) Bestimmen Sie – unter Angabe aller Rechenschritte – die Tangentialhyperebene von f_a im Punkt $(\boldsymbol{b}, f_a(\boldsymbol{b}))$. Für welche a liegt der Punkt $\boldsymbol{c} = (a,1,0)$ in dieser Ebene?

d) Sei $a = -1$. Bestimmen Sie die Richtung des steilsten An- und Abstiegs an der Stelle $\boldsymbol{b}$. In welcher Richtung ist dort die Richtungsableitung gleich Null?

e) Sei $a = 2$. Berechnen Sie näherungsweise die relative prozentuale Änderung von $f_2(\boldsymbol{b})$, wenn $\boldsymbol{b}$ geändert wird zu $\boldsymbol{b}^* = (0.9,0)$. Hinweis: Vollständiges Differential.

Aufgabe 2 (7+7+11 = 25 Punkte)

Betrachten Sie folgendes Gleichungssystem

$$\boldsymbol{F}(x,y,z,u) = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z,u) \\ f_2(x,y,z,u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + yz + e^u \\ x^2 + z^2 - zu - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die Stelle $\boldsymbol{a} = (2,5,-1,0)$.

a) Existiert an der Stelle $\boldsymbol{a}$ eine Auflösung $\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(y,z) \\ g_2(y,z) \end{pmatrix} = \boldsymbol{G}(y,z)$?

b) Zeigen Sie, dass eine Auflösung $\boldsymbol{G}(x,y) = (z,u)$ an der Stelle $\boldsymbol{a}$ mit $\boldsymbol{G}(2,5) = (-1,0)$ existiert.

c) Berechnen Sie unter Angabe aller Rechenschritte die Ableitung (Jacobi-Matrix) von $\boldsymbol{G}(x,y)$ an der Stelle $(2,5)$.

Aufgabe 3 (8+11+6= 25 Punkte)

a) Untersuchen Sie – unter Angabe aller Rechenschritte – die Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y, \qquad x, y \neq 0$$

auf lokale Extrema. Geben Sie Art und Wert der Extrema an.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Lagrange-Verfahrens, dass die Funktion $f(x,y) = xy$ mit $x, y \geq 0$ unter der Nebenbedingung $4x^2 + y^2 = 18$ im Punkt $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ ein Maximum besitzt.

c) Wie ändert sich das Maximum aus b) näherungsweise, wenn statt f die Funktion $\tilde{f}(x,y) = xy + e^{-x}$ betrachtet und die Nebenbedingung zu $3{,}9x^2 + y^2 = 18$ geändert wird? Hinweis: Verwenden Sie den Umhüllendensatz, dessen Voraussetzungen Sie als erfüllt ansehen können.

Aufgabe 4 (25 Punkte)

Lösen Sie mit Hilfe des Satzes von Kuhn und Tucker aus der aktuellen Vorlesung von Prof. Steinbach das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2 - 2x + 2(y+1)^2 + z + 2 \to \min! \\ g(x,y,z) &= x^2 + 2y + 2z^2 \leq 4 \\ x, y, z &\geq 0 \end{aligned}$$

und bestimmen Sie den Wert des Minimums. Überprüfen Sie die LICQ.