Klausur zur MATHEMATIK 2 für Studierende der Wirtschaftswissenschaften
am Mittwoch, dem 22. Juli 2010, 09:00–11:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 + 3 + 4 + 13 Punkte) Gegeben sei die Funktion zweier Veränderlicher

$$z = f(x, y) := \frac{x}{1 + x^2} + \frac{y}{1 + y^2}$$

und ein Vektor $\vec{a} = (2, 1)$.

a) Bestimmen Sie die Richtung des steilsten An- und Abstiegs an der Stelle $\vec{a}$. Geben Sie normierte Vektoren an.

b) Bestimmen Sie die Tangentialhyperebene von f im Punkt $(\vec{a}, f(\vec{a}))$.

c) Berechnen Sie näherungsweise mit Hilfe des vollständigen Differentials die relative prozentuale Änderung von $f(\vec{a})$, wenn $\vec{a}$ geändert wird zu $\vec{a}^* = (1.9, 1.1)$.

d) Untersuchen Sie f auf Extremstellen.

Aufgabe 2 (14 + 7 + 4 Punkte) Betrachten Sie das Gleichungssystem

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x^2 + y^2 + z^2 \\ x^2 + e^{y-1} - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die Stelle $\vec{a} = (1, 1, 1)$.

a) Existiert an der Stelle $\vec{a}$ eine Auflösung nach (y, z) mit $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix} =: \vec{G}(x)$? Existieren auch Auflösungen nach (x, y) und (x, z)?

b) Berechnen Sie unter Angabe aller Rechenschritte die Ableitung (Jacobi-Matrix) von $\vec{G}(x)$ an der Stelle $x = 1$.

c) Berechnen Sie mit Hilfe des vollständigen Differentials näherungsweise die Änderung von $\vec{G}(x) = \vec{G}(1)$ beim Übergang zu $\vec{G}(1.1)$.

Aufgabe 3 (18 + 7 Punkte)

a) Zeigen Sie - unter Angabe aller Rechenschritte - , dass die Funktion

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - 3x + 9$$

unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x, y, z) = x + 2z + 7 = 0,$$
$$g_2(x, y, z) = x + 6y - 4z - 131 = 0$$

im Punkt (3,18,-5) ein relatives Extremum besitzt. Von welcher Art ist es? Benutzen Sie das Verfahren nach Lagrange und geben Sie auch die Lagrange-Multiplikatoren, die zugehörige Hesse-Matrix sowie den Wert des Extremums an.
Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass die Determinante der Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion im o.g. Punkt den Wert 576 hat.

b) Wie ändert sich das Extremum aus a) näherungsweise, wenn statt g_1 die Funktion $\tilde{g}_1(x, y, z) = 0.9x+2z+7$ und statt g_2 die Funktion $\tilde{g}_2(x, y, z) = x+6.2y-4z-131$ betrachtet wird? Hinweis: Verwenden Sie den Umhüllendensatz, dessen Voraussetzungen Sie als erfüllt ansehen können.

Aufgabe 4 (25 Punkte) Lösen Sie mit Hilfe des Satzes von Kuhn und Tucker aus der aktuellen Vorlesung/Zentralübung das Optimierungsproblem

$$f(x, y, z) = \frac{1}{-2x + 4y - z - 3} \to \max!$$
$$g(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 5 \leq 0$$
$$x, y, z \geq 0$$

und bestimmen Sie den Wert des Maximums. Überprüfen Sie die LICQ. Begründen Sie jeden Ihrer Schritte und berechnen Sie alle Lagrange-Multiplikatoren.