Klausur zur MATHEMATIK 2 für Studierende der Wirtschaftswissenschaften

am Mittwoch, dem 06. Februar 2008, 12:00 – 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (5+5+7+4+4= 25 Punkte)

Gegeben sei die Funktion zweier Veränderlicher mit einem reellen Parameter $a > 0$

$$f_a(x,y) := \frac{e^{2x+y} - a}{x^2 + y^2}.$$

a) Geben Sie den Definitionsbereich von f_a an und untersuchen Sie f_a auf Homogenität.

b) Geben Sie die Gleichung der Niveaulinien zum Niveau $C = 0$ an (in Abhängigkeit vom Parameter a) und skizzieren Sie diese für $a = 1, a = e$ und $a = 1/e$.

c) Bestimmen Sie – unter Angabe aller Rechenschritte – die Tangentialhyperebene von f_a im Punkt $\boldsymbol{b} = (1,0)$. Für welche a liegt der Punkt $\boldsymbol{c} = (1,-1,a)$ in dieser Ebene?

d) Kann a so gewählt werden, dass in $\boldsymbol{b} = (1,0)$ der Betrag des steilsten Abstiegs gleich 1 ist?

e) Berechnen Sie näherungsweise die relative prozentuale Änderung von $f_0(x,y)$, wenn $\boldsymbol{b} = (1,0)$ geändert wird zu $\boldsymbol{b}^* = (0.9, 0.1)$. Hinweis: Vollständiges Differential.

Aufgabe 2 (3+10+12 = 25 Punkte)

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned} e^{xz} - x^2 + y^2 &= 1 \\ xy^3 + x^2 z &= 1 - yz^2 \end{aligned}$$

a) Bringen Sie das System auf die Form $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ und bestimmen Sie $\boldsymbol{F}(0,0,1)$ sowie $\boldsymbol{F}(1,1,0)$.

b) Ist das System in $\boldsymbol{a} = (0,0,1)$ oder in $\boldsymbol{b} = (1,1,0)$ lokal nach $(y,z)^T = \boldsymbol{g}(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$ auflösbar?

c) Berechnen Sie unter Angabe aller Rechenschritte die Ableitung (Jacobi-Matrix) $\boldsymbol{g}'(1)$.

Aufgabe 3 (10+9+6= 25 Punkte)

Gegeben sei die Funktion zweier Veränderlicher mit einem reellen Parameter a

$$f_a(x,y) := x^4 - 2x^2 + (y^2-1)^2 + a \cdot xy.$$

a) Zeigen Sie: $f_a(x,y)$ besitzt für $a = 4$ genau drei stationäre Punkte. Bestimmen Sie Art und Wert des Extremums an der Stelle $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

b) Untersuchen Sie $f_a(x,y)$ für $a = 0$ unter der Nebenbedingung $2y^2 + 3 = x^4 - 2x^2 + 1 + 4y$ auf stationäre Punkte. Hinweis: Eliminationsmethode.

c) Wie ändert sich näherungsweise das Extremum aus a) an der Stelle $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, wenn statt $f_a(x,y)$ mit $a = 4$ die Funktion $f_a(x,y)$ mit $a = 3{,}9$ betrachtet wird. Berechnen Sie diese Änderungen näherungsweise mit Hilfe des Umhüllendensatzes. (Hinweis: Die Voraussetzungen des Umhüllendensatzes dürfen als erfüllt angesehen werden.)

Aufgabe 4 (25 Punkte)

Lösen Sie mit Hilfe des Satzes von Kuhn und Tucker das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \frac{1}{x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2} \to \max! \\ g(x,y,z) &= x + y + z - 1 \le 0 \\ x, y, z &\ge 0 \end{aligned}$$

und bestimmen Sie den Wert des Maximums. Hinweis: Überführen Sie zunächst das Maximierungsproblem in ein Minimierungsproblem.