Klausur zur MATHEMATIK 2 für Studierende der Wirtschaftswissenschaften
am Mittwoch, dem 04. Februar 2009, 12:00–14:00 Uhr

Aufgabe 1 (4+6+8+3+4 Punkte) Gegeben sei die Funktion zweier Veränderlicher mit einem reellen Parameter a

$$z = f_a(x, y) := a\frac{x+y}{x+y-5}$$

und ein Vektor $\vec{b} = (2, 1)$.

a) Geben Sie die Definitionsmenge von f_a an. Ist f_a homogen?

b) Bestimmen Sie für $a = 2$ eine nach y aufgelöste Gleichung für die Niveaulinien von f_a und skizzieren Sie die Niveaus $C = -2$, $C = 0$ und $C = 1$.

c) Bestimmen Sie - unter Angabe aller Rechenschritte - die Tangentialhyperebene von f_a im Punkt $(\vec{b}, f_a(\vec{b}))$. Für welche a liegt der Punkt $\vec{c} = (1, 0, a)$ in dieser Ebene?

d) Sei $a = 1$. Bestimmen Sie die Richtung des steilsten An- und Abstiegs an der Stelle $\vec{b}$. Geben Sie normierte Vektoren an.

e) Sei $a = 1$. Berechnen Sie näherungsweise mit Hilfe des vollständigen Differential die relative prozentuale Änderung von $f_1(\vec{b})$, wenn $\vec{b}$ geändert wird zu $\vec{b}^* = (1.9, 0.9)$.

Aufgabe 2 (6+8+11 Punkte) Betrachten Sie das Gleichungssystem

$$\vec{F}(x, y, z, u) = \begin{pmatrix} f_1(x, y, z, u) \\ f_2(x, y, z, u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe^x - y + z - u \\ -x - y + z - u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die Stelle $\vec{a} = (0, 1, 0, -1)$.

a) Existiert an der Stelle $\vec{a}$ eine Auflösung nach (y, u) mit $\begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x, z) \\ g_2(x, z) \end{pmatrix} = \vec{G}(x, z)$?

b) Zeigen Sie, dass eine Auflösung nach (x, y) mit $\vec{G}(z, u) = (x, y)$ an der Stelle $\vec{a}$ mit $\vec{G}(0, -1) = (0, 1)$ exisitert.

c) Berechnen Sie unter Angabe aller Rechenschritte die Ableitung (Jacobi-Matrix) von $\vec{G}(z, u)$ an der Stelle $(0, -1)$.

Aufgabe 3 (11+14 Punkte)

a) Zeigen Sie - unter Angabe aller Rechenschritte - , dass die Funktion

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

drei stationäre Punkte besitzt. Geben Sie Art und Wert der von $(0, 0)$ verschiedenen Extrema an.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Langrange-Verfahrens, dass die Funktion $g(x, y, z) = x^2 + 6y^2 + z^2$ unter der Nebenbedingung $2x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$ im Punkt $(\sqrt{2}, 0, 0)$ ein Minimum besitzt.

Aufgabe 4 (25 Punkte) Lösen Sie mit Hilfe des Satzes von Kuhn und Tucker aus der aktuellen Vorlesung von Prof. Steinbach das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x^2 + 2(y-1)^2 + (z+1)^2 + 2 \to \min! \\ g(x, y, z) &= x + 2y + 4z - 2 \leq 0 \\ x, y, z &\geq 0 \end{aligned}$$

und bestimmen Sie den Wert des Minimums. Überprüfen Sie die LICQ. Begründen Sie jeden Ihrer Schritte.