

**Aufgabe 1** (8 + 12 + 5 Punkte)

Eine Matrix und ein Vektor sind gegeben durch

$$A(r) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & r & 8 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie schriftlich die Determinante von  $A(r)$ . Für welche  $r \in \mathbb{R}$  existiert keine Inverse? Hinweis: Beachten Sie die Struktur der Matrix.
- b) Sei  $r = 1$ . Berechnen Sie unter Angabe aller Rechenschritte die Inverse von  $A(1)$ . Machen Sie die Probe!
- c) Sei  $r = 1$ . Lösen Sie die Gleichung  $A\vec{x} = (A + E)\vec{b}$ , wobei  $E$  die Einheitsmatrix bezeichnet.

---

**Aufgabe 2** (12 + 10 + 3 Punkte) Gegeben sei das Lineare Optimierungsproblem (LOP) mit einem Parameter  $t \in \mathbb{R}$  und  $x, y \geq 0$

$$\begin{aligned} \pi(x, y) &= tx + 4y \rightarrow \max! \\ x + y &\leq 9, \\ -4x + 2y &\leq 2, \\ x &\leq 5, \\ y &\leq 5. \end{aligned}$$

- a) Sei  $t = 8$ . Lösen Sie das LOP graphisch. Für welches  $t > 0$  gibt es unendlich viele Lösungen? Für welche  $t \in \mathbb{R}$  ist der Punkt  $(2; 5)$  alleinige Lösung?
- b) Sei  $t = 8$ . Lösen Sie das LOP mit dem Simplex-Algorithmus unter Angabe aller Rechenschritte. Geben Sie in jedem Schritt die Basislösung an.
- c) Wie lautet das zugehörige duale LOP für beliebiges  $t$ ?

---

**Aufgabe 3** (10 + 6 + 6 + 3 Punkte)

- a) Eine rekursiv definierte Folge ist gegeben durch

$$a_{n+1} = a_n - \frac{3^n}{4^{n+1}}, \quad a_0 \in \mathbb{R}, n \geq 0.$$

Untersuchen Sie die Folge auf Monotonie

Geben Sie alle Folgenglieder bis  $a_3$  in Abhängigkeit von  $a_0$  an (Hinweis: Sie brauchen die Brüche nicht zusammenzufassen). Drücken Sie  $a_{n+1}$  mit Hilfe von  $a_0$  aus und untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz. Geben Sie im Falle von Konvergenz den Grenzwert an.

- b) Herr L. legt 10.000 Euro bei seiner Bank an. Nach 15 Jahren hat sich sein angelegtes Geld verdoppelt. Welchen Zinssatz hat er von der Bank erhalten
  1. bei jährlicher Verzinsung,
  2. bei stetiger Verzinsung?
- c) Bestimmen Sie ausführlich zu den unten stehenden Folgen die Grenzwerte ( $n > 0$ )

$$a_n = \frac{5n^4 + 3n^2 - 5}{4n^5 - 3n^4 + n}, \quad b_n = \left[ \sqrt{n^2 - 4} - n \right] + 27.$$

- d) Wie muss der Parameter  $r \in \mathbb{R}$  gewählt werden, damit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{5n} \right)^{r \cdot n} = e^2 ?$$

**Bitte beachten Sie die zweite Seite!**

**Aufgabe 4** (16 + 4 + 5 Punkte) Betrachten Sie die Funktion  $f(x) = x^4 - 6x^2 - 1$ .

- a) Untersuchen Sie  $f(x)$  auf Extremwerte, Monotonie und Konvexität und das Verhalten für  $x \rightarrow \pm\infty$ .
  - b) Begründen Sie mit Hilfe von a), dass  $f$  nur eine Nullstelle  $x > 0$  besitzt.  
Führen Sie einen Schritt mit dem Newton-Verfahren durch, um die Nullstelle in der Nähe von  $x = 3$  anzunähern.  
Hinweis: Nehmen Sie als Startwert  $x_0 = 3$  und rechnen Sie exakt.
  - c) Sei  $x = 2$ . Bestimmen Sie mit Hilfe der Elastizität, um wieviel % sich  $f(x)$  näherungsweise ändert, wenn  $x$  um 5% erhöht wird.
-