Klausur zur MATHEMATIK 2 für Studierende der Wirtschaftswissenschaften
am Donnerstag, dem 09. Juli 2009, 9:00–11:00 Uhr

Aufgabe 1 (5+7+8+5 Punkte) Gegeben sei die Funktion dreier Veränderlicher und eines reellen Parameters a

$$f_a(x_1, x_2, x_3) := (2x_1 + x_2)^2 + (x_2 + 1)^2 + a \cdot x_1(x_3 - 1)$$

und ein Vektor $\vec{b} = (1, 2, -2)$.

a) Geben Sie die Definitionsmenge von f_a an und untersuchen Sie die Funktion auf Homogenität.

b) Sei $a = 1$. Bestimmen Sie die Richtung des steilsten An- und Abstiegs an der Stelle $\vec{b}$. Geben Sie normierte Vektoren an.

c) Bestimmen Sie für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}$ unter Angabe aller Rechenschritte die Tangentialhyperebene von f_a im Punkt $(\vec{b}, f_a(\vec{b}))$. Für welche a liegt der Punkt $\vec{c} = (0, 0, 0, a)$ in dieser Ebene?

d) Sei $a = 1$. Berechnen Sie näherungsweise mit Hilfe des vollständigen Differentials die relative prozentuale Änderung von $f_1(\vec{b})$, wenn $\vec{b}$ geändert wird zu $\vec{b}^* = (1, 2.1, -1.9)$.

Aufgabe 2 (5+20 Punkte) Gegeben sei eine Funktion

$$f(x, y, z) = (x + 1)^2 + yz + y^2 e^{-z} - 8.$$

a) Zeigen Sie: An der Stelle $\vec{b} = (1, 2, 0)$ gibt es eine Auflösung von $f(x, y, z) = 0$ nach $z = g(x, y)$ mit $g(1, 2) = 0$.

b) Bestimmen Sie unter Angabe aller Rechenschritte die Extremstellen und Extrema von f.

Aufgabe 3 (17+8 Punkte)

a) Zeigen Sie mit Hilfe das Lagrange-Verfahrens, dass die Funktion $f(x, y, z) = (x - \frac{1}{2})^2 + (y - 4)^2 + (z - 4)^2$ unter der Nebenbedingung $x = y^2 + z^2$ ein Minimum in $\vec{a} = (2, 1, 1)$ besitzt.

b) Berechnen Sie näherungsweise mit dem Umhüllendensatz, um welchen Wert sich das Minimum aus a) ändert, wenn statt f die Funktion $\tilde{f}(x, y, z) = (x - \frac{1}{2})^2 + (y - 4)^2 + 0.8(z - 4)^2$ betrachtet und die Nebenbedingung zu $x = y^2 + 1.2z^2$ geändert wird.

Aufgabe 4 (25 Punkte) Leiten Sie mit Hilfe des Satzes von Kuhn und Tucker aus der aktuellen Vorlesung von Prof. Escher die Lösung des folgenden Optimierungsproblems her

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x^2 + x + y^2 - y - 4(z + 3)^2 + 2 \to \min! \\ g(x, y, z) &= x + 4z^2 \leq 4 \\ x, y, z &\geq 0 \end{aligned}$$

und bestimmen Sie den Wert des Minimums. Überprüfen Sie die LICQ. Begründen Sie jeden Ihrer Schritte und berechnen Sie alle Lagrange-Multiplikatoren.