Klausur zur MATHEMATIK 2 für Studierende der Wirtschaftswissenschaften
am Donnerstag, dem 21. Juli 2011, 09:00–11:00 Uhr

Aufgabe 1 (2 + 5 + 6 + 3 + 4 + 5 Punkte) Gegeben sei die Funktion zweier Veränderlicher

$$z = f(x, y) := \sqrt{9(x+1)^2 + 4(y-2)^2}.$$

und ein Vektor $\vec{a} = (-1, 1)$.

a) Geben Sie die Definitionsmenge von f an. Ist f homogen?

b) Geben Sie eine Gleichung der Höhenlinen an. Skizzieren Sie die Höhenlinien zu den Niveaus $z = 0$ und $z = 2$ und $z = 3$.

c) Bestimmen Sie die Richtung des steilsten An- und Abstiegs an der Stelle $\vec{a}$. Geben Sie normierte Vektoren an.

d) Bestimmen Sie die Tangentialhyperebene von f im Punkt $(\vec{a}, f(\vec{a}))$. Liegt der Punkt $(3, 17, -2)$ in der Ebene?

e) Berechnen Sie näherungsweise mit Hilfe des vollständigen Differentials die relative prozentuale Änderung von $f(\vec{a})$, wenn $\vec{a}$ geändert wird zu $\vec{a}^* = (-0.9, 1.2)$.

f) Betrachten Sie die Stelle $\vec{b} = (0, 2)$. Existiert eine Auflösung der Gleichung $f(x, y) = 3$ nach x bzw. nach y? Verwenden Sie den Satz über implizite Funktionen.

Aufgabe 2 (12 + 13 Punkte)

a) Berechnen Sie ausführlich - unter Angabe aller Rechenschritte - mit Hilfe von partieller Integration bzw. Substitution die beiden uneigentlichen Intetgrale

$$\int_1^e \frac{1}{x^2} \ln(x)\, dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^\infty x^3 e^{-2x^4+5}\, dx.$$

b) Sei $f_a(x, y) = ax^2 - 2x(y+1) + y^2$, mit $a \neq 1$. Bestimmen Sie den einzigen kritischen Punkt von f_a. Unter welchen Bedingungen an den Parameter a handelt es sich um eine Minimalstelle? Kann es eine Maximalstelle geben?

Aufgabe 3 (18 + 7 Punkte)

a) Zeigen Sie - unter Angabe aller Rechenschritte - , dass die Funktion

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2$$

unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x, y, z) = x + y + z = 0,$$
$$g_2(x, y, z) = 2x - y + z - 14 = 0$$

im Punkt (4,-5,1) ein relatives Extremum besitzt. Von welcher Art ist es? Verwenden Sie das Verfahren nach Lagrange und geben Sie auch die Lagrange-Multiplikatoren, die zugehörige Hesse-Matrix sowie den Wert des Extremums an.
Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass die Determinante der Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion im o.g. Punkt den Wert 28 hat.

b) Wie ändert sich das Extremum aus a) näherungsweise, wenn statt g_1 die Funktion $\tilde{g}_1(x, y, z) = x + y + 1.2z$ und statt g_2 die Funktion $\tilde{g}_2(x, y, z) = 2x - 0.9y + z - 14$ betrachtet wird? Verwenden Sie den Umhüllendensatz, dessen Voraussetzungen Sie als erfüllt ansehen können.

Aufgabe 4 (25 Punkte) Lösen Sie mit Hilfe des Satzes von Karush, Kuhn und Tucker aus der aktuellen Vorlesung/Zentralübung das Optimierungsproblem

$$f(x, y, z) = x^2 - x + 2y^2 + 8y + z^2 - 2z + 12 \to \text{min!}$$
$$g(x, y, z) = 6x^2 + y^2 - 3 \leq 0$$
$$x, y, z \geq 0$$

und bestimmen Sie den Wert des Minimums. Überprüfen Sie die LICQ. Begründen Sie jeden Ihrer Schritte und berechnen Sie alle Lagrange-Multiplikatoren.