Klausur zur MATHEMATIK 2 für Studierende der Wirtschaftswissenschaften
am Donnerstag, dem 14. Dezember 2011, 16:30–18:30 Uhr

Aufgabe 1 (2 + 6 + 4 + 5 + 4 + 4 Punkte) Gegeben sei die Funktion dreier Veränderlicher

$$f(x, y, z) = 2x + y - zx + ye^x - 2.$$

a) Geben Sie die Definitionsmenge von f an. Ist f homogen?

b) Bestimmen Sie die Richtung des steilsten An- und Abstiegs an der Stelle $\vec{a} = (0, 2, -1)$. Geben Sie normierte Vektoren an.

c) Bestimmen Sie die Tangentialhyperebene von f im Punkt $(\vec{a},\ f(\vec{a}))$. Liegt der Punkt (2, 1, 3, 8) in der Ebene?

d) Berechnen Sie näherungsweise mit Hilfe des vollständigen Differentials die relative prozentuale Änderung von $f(\vec{a})$, wenn $\vec{a}$ geändert wird zu $\vec{a}^* = (-0.1, 2.1, -0.8)$.

e) Sei $\vec{b} = (0, 1, 1)$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass eine Auflösung der Gleichung $f(x, y, z) = 0$ nach x im Punkt $\vec{b}$ existiert, d.h. es gibt eine Funktion $x = g(y, z)$ mit $0 = g(1, 1)$ und $f(g(y, z), y, z) = 0$ für alle (y, z) in einer Umgebung von $(1, 1)$.

f) Berechnen Sie den Gradienten (Jacobi-Matrix) von g an der Stelle $(1, 1)$.

Aufgabe 2 (15 + 10 Punkte)

a) Berechnen Sie ausführlich - unter Angabe aller Rechenschritte - mit Hilfe von Substitution bzw. partieller Integration die beiden Intetgrale

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 2}}\, dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^\infty (x^2 + x)e^{-x}\, dx.$$

b) Betrachten Sie die von zwei Parametern $a,\ b \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion

$$f_{a,b}(x, y) = ax^3 - 5x + 3xy + by^2 - 2y + 5.$$

Bestimmen Sie die Parameter a und b so, dass die Funktion in $(x^*, y^*) = (2, -1)$ eine stationäre Stelle hat. Überprüfen Sie dann, ob $f_{a,b}$ mit den so bestimmten Werten a und b in $(2, -1)$ ein relatives Extremum hat. Von welcher Art ist es?

Aufgabe 3 (16 + 9 Punkte)

a) Zeigen Sie - unter Angabe aller Rechenschritte - , dass die Funktion

$$f(x, y, z) = 5x + y - 3z$$

unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$
$$g_2(x, y, z) = x + y + z = 0$$

im Punkt $(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ein relatives Etremum besitzt. Von welche Art ist es? Verwenden Sie das Verfahren nach Lagrange und geben Sie auch die Lagrange-Multiplikatoren, die zugehörige Hesse-Matrix sowie den Extremwert an.
Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass die Determinante der Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion im o.g. Punkt den Wert $-48\sqrt{2}$ hat.

b) Berechen Sie näherungsweise mit dem Umhüllendensatz, um welchen Wert sich das Extremum in $(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ändert, wenn statt g_1 die Funktion $\tilde{g}_1(x, y, z) = (x + 0.1)^2 + 0.9y^2 + z^2 - 1$ und statt f die Funktion $\tilde{f}(x, y, z) = 4.9x + y - 3z$ betrachtet wird.

Bitte beachten Sie die zweite Seite!

Aufgabe 4 (25 Punkte) Lösen Sie mit Hilfe des Satzes von Karush, Kuhn und Tucker aus der aktuellen Vorlesung/Zentralübung das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2 - 6x - 2xz + 2y^2 + 4y \to \min! \\ g(x,y,z) &= y^2 + z^2 - 4 \leq 0 \\ x, y, z &\geq 0 \end{aligned}$$

und bestimmen Sie den Wert des Minimums. Überprüfen Sie die LICQ. Begründen Sie jeden Ihrer Schritte und berechnen Sie alle Lagrange-Multiplikatoren.