Klausur zur MATHEMATIK 2 für Studierende der Wirtschaftswissenschaften
am Mittwoch, den 19. Dezember 2012, 19:30–21:30 Uhr

Aufgabe 1 (3 + 5 + 4 + 4 + 5 + 4 Punkte) Gegeben sei die Funktion zweier Veränderlicher

$$f(x,y) = \frac{1}{x^3 y}.$$

a) Geben Sie die Definitionsmenge von f an. Ist f homogen? Geben Sie im Falle von Homogenität auch den Grad an.

b) Bestimmen Sie die Richtung des steilsten An- und die des steilsten Abstiegs an der Stelle $\vec{a} = (1,1)$. Geben Sie normierte Vektoren an.

c) Begründen Sie, dass f keine Extrema besitzt.

d) Bestimmen Sie die Tangentialhyperebene von f im Punkt $(\vec{a},\ f(\vec{a}))$. Bestimmen Sie $b \in \mathbb{R}$, so dass der Punkt $(-1,\ b,\ -1)$ in der Ebene liegt.

e) Berechnen Sie näherungsweise mit Hilfe des vollständigen Differentials die relative prozentuale Änderung von $f(\vec{a})$, wenn $\vec{a}$ geändert wird zu $\vec{a}^* = (0.9, 1.2)$.

f) Skizzieren Sie die Höhenlinien zu den Niveaus $c = 1$ und $c = -1$.

Aufgabe 2 (7 + 8 + 10 Punkte)

a) Berechnen Sie ausführlich - unter Angabe aller Rechenschritte - das Intetegal

$$\int_{-1}^{1} x^2 \sqrt{2x^3 + 2}\, dx.$$

b) In einem Zeitraum von 10 Jahren macht eine Firma einen von der Zeit t abhängigen, stetig fließenden Gewinn g(t) = 3t . Dieser Gewinn wird auf ein Konto eingezahlt und mit r = 5% pro Jahr **stetig** verzinst. Bestimmen Sie den **Gegenwartswert**.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Kettenregel die 1. Ableitung der Funktion $h(t) = g\big(x(t),\ y(t)\big)$ (ohne $h(t)$ explizit zu berechnen!) an der Stelle $t_0 = 3$ mit

$$g(x,y) = 2x^3 - 7xy + 3y^2, \qquad x(t) = 2 - t, \qquad y(t) = t^2 - 4t + 7.$$

Aufgabe 3 (10 + 15 Punkte)

a) Bestimmen Sie den einzigen stationären Punkt der Funktion

$$f(x,y) = x^2 - \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{4} - x$$

Handelt es sich hier um ein relatives Maximum oder um ein relatives Minimum? Geben Sie den Wert des Extremums an.

b) Zeigen Sie, dass f unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$$

für $(x,y) = (-\frac{\sqrt{3}}{2},\ 1)$ ein Extremum besitzt. Von welcher Art ist dieses? Benutzen Sie das Verfahren nach Lagrange und geben Sie auch den korrekten Lagrange-Multiplikator, die zugehörige Hesse-Matrix sowie den Wert des Extremums an. Berechnen Sie ausführlich die Determinante.

Bitte beachten Sie die zweite Seite!

Aufgabe 4 (25 Punkte) Lösen Sie mit Hilfe des Satzes von Karush, Kuhn und Tucker aus der aktuellen Vorlesung/Zentralübung das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= e^{x^2+2x+y^2-y-2z^2-8z+20} \to \text{min!} \\ g(x,y,z) &= x^2y+z^2-4 \leq 0 \\ x,y,z &\geq 0 \end{aligned}$$

und bestimmen Sie den Wert des Minimums. Überprüfen Sie die LICQ. Begründen Sie jeden Ihrer Schritte und berechnen Sie alle Lagrange-Multiplikatoren.
Hinweis: Warum muss $x = 0$ sein?
